

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{取平方根})$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

故 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解有兩個： $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 和 $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

(四)其中 $b^2 - 4ac$ 我們稱之為判別式，有以下三種可能：

1. $b^2 - 4ac > 0$ ，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ， $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，兩相異根。

2. $b^2 - 4ac = 0$ ，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ， $x = \frac{-b}{2a}$ ，重根。

3. $b^2 - 4ac < 0$ ，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，因負數沒有平方根，故無解。

(五)說明如何利用公式解 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 。

先利用相反數將所有減法改記成加法，

並將所有省略係「1」也還原，得 $x^2 - 5x - 2 = 1x^2 + (-5)x + (-2)$ 。

其次，比較標準方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 得 $a = 1$ 、 $b = -5$ 、 $c = -2$ 。

代入公式解得

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1},$$

經過計算，得 $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$ 。

故 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 的解有兩個： $x = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$ 和 $x = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$ 。

對應教材：AC-8-7-2

科別	試題年級	受測年級			試題編號
數學	8	8	202405M8A018		
			11305M8A18		
題目	計算 $(4x^2 - 2x + 5) \div (2x + 1)$ 的餘式為何？ (1) 9 (2) 7 (3) 5 (4) 3				
答案	2	認知歷程向度	程序執行	題型	選擇題
學習內容	A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。 備註：不涉及使用分離係數法。				
基本學習內容	AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算。			內容領域	代數
施測後回饋 訊息	<p>評量重點： 本題是二次多項式除以一次多項式的計算題，要求學生算出餘式，評量學生多項式除法計算的能力。</p> <p>教學建議： 下面以「$(4x^2 + x - 3) \div (x + 2)$」為例，說明如何幫助學生解題。 (一)說明「商式」及「餘式」的意義及限制。 幫助學生複習整數除法直式算則舊經驗，然後再將方法類比至多項式除法，例如：</p> $ \begin{array}{r} 13 \\ 12 \overline{) 158} \\ \underline{12} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \times 10 + 3 \\ 1 \times 10 + 2 \overline{) 1 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8} \\ \underline{1 \times 10^2 + 2 \times 10} \\ 3 \times 10 + 8 \\ \underline{3 \times 10 + 6} \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \times x + 3 \\ 1 \times x + 2 \overline{) 1 \times x^2 + 5 \times x + 8} \\ \underline{1 \times x^2 + 2 \times x} \\ 3 \times x + 8 \\ \underline{3 \times x + 6} \\ 2 \end{array} $ <p>(二)幫學生複習多項式的乘法 例如：$6x(x + 2) = 6x^2 + 12x$</p> <p>(三)幫學生複習除式為單項式的除法 例如：$6x^2 \div (2x) = 3x$</p>				

(四) $(4x^2 + x - 3) \div (x + 2)$ 的直式紀錄為

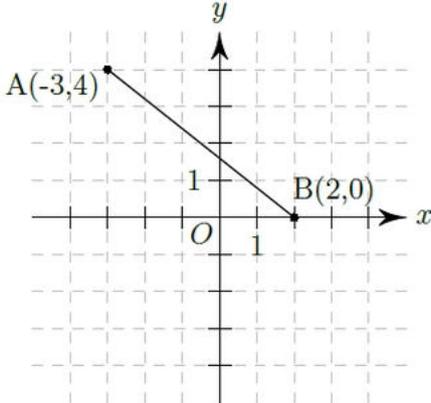
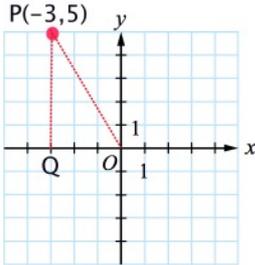
$$\begin{array}{r}
 \div x = 4x \quad \div x = -7 \\
 x - 7 \\
 \hline
 x+2 \overline{) 4x^2 + x - 3} \\
 \underline{4x^2 + 8x} \\
 -7x - 3 \\
 \underline{-7x - 14} \\
 11
 \end{array}$$

1 $4x^2 \div x = 4x$ 4 $-7x \div x = -7$
 2 $4x \cdot (x+2) = 4x^2 + 8x$
 3 $x - 8x = -7x$ 5 $-7 \cdot (x+2) = -7x - 14$
 6 $-3 - (-14) = 11$

(五) x 的次數比除數小的就不必再計算，就是餘式。

所以，商式 $4x - 7$ ，餘式 11。

對應教材：AC-8-3-3

科別	試題年級	受測年級	試題編號		
數學	8	8	202405M8G022		
			11305M8G22		
題目	<p>如圖，已知 $A(-3,4)$，$B(2,0)$，請問 $\overline{AB} = ?$</p>  <p>(1) $\sqrt{41}$ (2) $\sqrt{9}$ (3) 5 (4) 4</p>				
答案	1	認知歷程向度	程序執行	題型	選擇題
學習內容	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。				
基本學習內容	GC-8-1-1 直角坐標上兩點的距離公式：若 $A(a,b)$ ， $B(c,d)$ 則 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$			內容領域	坐標幾何
施測後回饋 訊息	<p>評量重點：</p> <p>本題給定坐標平面上兩點及其坐標，要求學生算出其距離，評量學生利用直角坐標上兩點距離公式解題的能力。</p> <p>教學建議：</p> <p>(一)先複習畢氏定理。</p> <p>(二)下面以「直角坐標平面上，P 點坐標為 $(-3,5)$，請問 P 點與原點的距離為何？」為例，說明如何幫助學生解題。</p> <p>1.將 P 點標示在直角坐標上，先連接 P 點與原點 O，並畫出 P 點至 x 軸的垂線(垂足為 Q)，得到直角三角形 OPQ。</p> 				

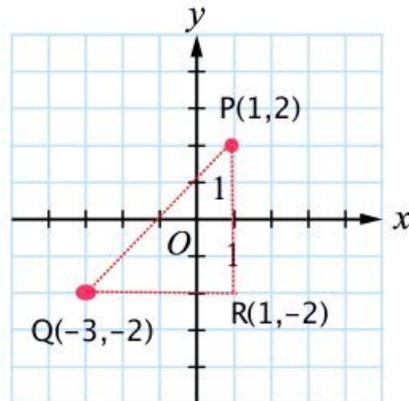
2. 利用畢氏定理計算出 \overline{OP} 的長度。

$$\overline{PQ} = 5, \overline{OQ} = 3$$

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

(三) 下面再以「直角坐標平面上，P 點坐標為(1,2)，Q 點坐標為(-3,-2)，請問 $\overline{PQ} = ?$ 」為例，說明如何幫助學生解題。

1. 將 P 點與 Q 點分別標示在直角坐標上，連接 P 點與 Q 點，並畫出 P 點與 x 軸的垂直線及 Q 點與 y 軸的垂直線，兩線交於 R 點，得到直角三角形 PQR。



$$\overline{QR} = 1 - (-3) = 4$$

$$\overline{PR} = 2 - (-2) = 4$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{[1 - (-3)]^2 + [2 - (-2)]^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

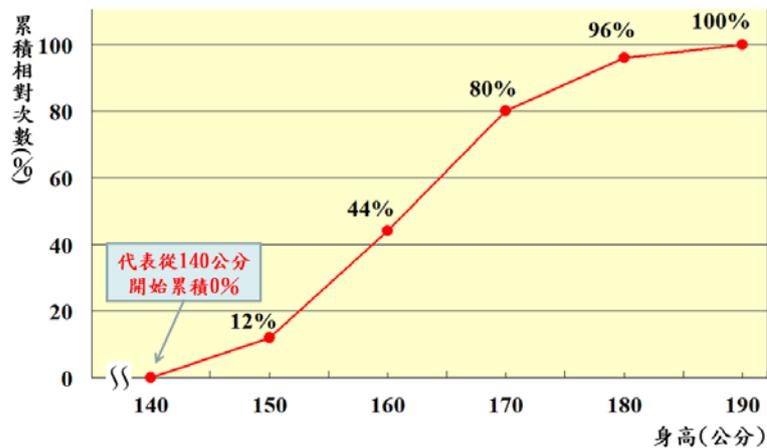
2. 此時引導學生觀察 1、-3 及 2、-2 分別是 P 點、Q 點的 x 坐標與 y 坐標。

同時可提醒 $[1 - (-3)]^2 = [(-3) - 1]^2$, $[2 - (-2)]^2 = [(-2) - 2]^2$ ，以加強學生對直角坐標上兩點的距離公式的印象：

$$\text{若 } A(a,b), B(c,d), \text{ 則 } \overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \text{。}$$

對應教材：GC-8-1-1

	試題年級	受測年級	試題編號		
數學	8	8	202405M8D024		
			11305M8D24		
題目	<p>下圖為八年級數學段考成績累積相對次數分配折線圖，已知八年級共有 40 位學生。</p> <p>八年級數學段考成績累積相對次數分配折線圖</p> <p>下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>(1) 數學段考成績未滿 60 分的人數有 6 人</p> <p>(2) 數學段考成績在 80 分以上的人數有 28 人</p> <p>(3) 50 ~ 70 分的人數跟 70 ~ 80 分的人數一樣多</p> <p>(4) 80 ~ 90 分的人數是 90 ~ 100 分的人數的 2 倍</p>				
答案	2	認知歷程向度	程序執行	題型	選擇題
學習內容	D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。				
基本學習內容	DC-8-1-2 累積相對次數折線圖。			內容領域	資料與不確定性
施測後回饋訊息	<p>評量重點：</p> <p>本題給定累積相對次數分配的折線圖，要求學生選出正確的敘述，評量學生是否理解累積相對次數分配折線圖的意義。</p> <p>教學建議：</p> <p>(一) 複習由累積相對次數分配表繪製累積相對次數分配折線圖的過程。</p> <p>(二) 再以中山國中二年三班 25 位學生，身高累積相對次數分配折線圖為例，判斷圖形中呈現的數據意義。</p>				



中山國中二年三班學生身高累積相對次數分配折線圖

可從圖中讀出以下訊息：

1. 累積到 150 公分的人佔全體的 12%。
2. 累積到 160 公分的人佔全體的 44%，故 150 公分以上、未滿 160 公分的人，佔全體的 $44\% - 12\% = 32\%$ 。
3. 累積到 170 公分的人佔全體的 80%，故全班未滿 170 公分的人數為 $25 \times 80\% = 20$ (人)。
4. 160 公分以上未滿 180 公分的人數佔比相當於：
未滿 180 公分的人數佔比減去未滿 160 公分的人數佔比
 $96\% - 44\% = 52\%$ ，共有 $25 \times 52\% = 13$ (人)。

對應教材：DC-8-1-2

	試題年級	受測年級	試題編號		
數學	8	8	202405M8A015		
			11305M8A15		
題目	<p>請問 $(x + 1)$ 是下列哪個多項式的因式？</p> <p>(1) $(x + 1)(x + 2) - (x + 1)(x - 2)$</p> <p>(2) $(x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 2)$</p> <p>(3) $(x - 1)(x + 2) - (x + 1)(x - 2)$</p> <p>(4) $(x - 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 2)$</p>				
答案	1	認知歷程向度	概念理解	題型	選擇題
學習內容	A-8-4 因式分解：因式的意義（限制在二次多項式的一次因式）；二次多項式的因式分解意義。				
基本學習內容	AC-8-4-1 整係數多項式的因式、倍式。			內容領域	代數
施測後回饋 訊息	<p>評量重點：</p> <p>本題給定一次式，要求學生選出因式含有該一次式的多項式，評量學生是否理解多項式因式與倍式的意義。</p> <p>教學建議：</p> <p>(一)復習整數的因數、倍數關係，再類推到多項式的因式、倍式關係。</p> <p>1. $12 = 3 \times 4$，表示 12 是 3 的倍數，也是 4 的倍數；反過來說 3 和 4 都是 12 的因數。</p> <p>2. $2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$，表示 $2x^2 + 3x + 1$ 是 $(2x + 1)$ 的倍式，也是 $(x + 1)$ 的倍式；反過來說 $(2x + 1)$ 和 $(x + 1)$ 都是 $2x^2 + 3x + 1$ 的因式。</p> <p>3. 若 $(2x + 1)$ 和 $(x + 1)$ 都是二次多項式 A 的因式，則二次多項式 A 可能為 $(x + 1)(2x + 1)$ 或 $a(x + 1)(2x + 1)$，其中 a 為常數。</p> <p>(二)復習整數除以整數得商數與餘數，並利用除法原理改寫成乘法算式，如下：</p> <p>$12 \div 3$ 得商數為 4，餘數為 0，改寫成 $12 = 3 \times 4 + 0$。</p> <p>其次，類推到多項式的除法運算，並改寫成乘法算式，如下：</p> <p>$(2x^2 + 3x + 1) \div (2x + 1)$ 的商式為 $x + 1$，餘式為 0，改寫成 $2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1) + 0$。</p> <p>(三)再復習整數時，給定乘法算式，學生能知道「積為被乘數和乘數的倍數」，以及「被乘數和乘數都是積的因數」。</p> <p>以 $12 = 3 \times 4$ 為例說明：12 是 3 的倍數，也是 4 的倍數；3 和 4 都是 12 的因數。</p>				

其次，類推到給定多項式的乘法算式，學生能知道「積式為被乘式和乘式的倍式」，以及「被乘式和乘式都是積式的因數」。

以 $(2x^2+3x+1)=(2x+1)(x+1)$ 為例說明：

$(2x^2+3x+1)$ 是 $(2x+1)$ 的倍式，也是 $(x+1)$ 的倍式； $(2x+1)$ 和 $(x+1)$ 都是 $2x^2+3x+1$ 的因式。

(四)給定餘式為 0 的除法算式，例如 $(2x^2+3x+1)\div(2x+1)=x+1$ ，透過步驟(一)改寫成寫成乘法算式，再透過步驟(二)得知其三者之間因式與倍式的關係，幫助學生理解「給定餘式為 0 的除法算式，可得被除式為除式和商式的倍式，以及除式和商式都是被除式的因式」。

對應教材：AC-8-4-1